SOLUCIÓN PRUEBA N° 1 2016-1

FECHA: Miércoles 27 de abril 2016

1. Sea la función $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Analizar

   a) **[7 ptos.]** Continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

   Solución:

   Se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

   Veamos que ocurre con los caminos

   - C1: $x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0\sin(0)}{0+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$
   - C2: $y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(0)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(0)}{x} = 0$
   - C3: $y = x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x^2)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2} \cdot 1 = 0$
   - C4: $y = x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x^3)}{x^2+x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x^3)}{x(x+x^3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2\cos(x^3)}{1+3x^2} = 0$

   Se sospecha que el límite es 0. Ahora bien:

   2 puntos

$$\left|\frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x\sin(xy)}{x^2}\right| = \left|\frac{\sin(xy)}{x}\right| = g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\sin(xy)}{x}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y\sin(xy)}{xy}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y\cdot 1| = 0$$

   Por lo que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Luego f es continua en $\mathbb{R}^2$

   5 puntos

   b) **[7 ptos.]** La derivada direccional de f en $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\hat{u} = (a,b)$.

   Solución:

   Como $||\hat{u}|| = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1$ y por definición:

$$\begin{aligned} D_{\hat{u}}f &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah, y_0+bh) - f(x_0,y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(ah,bh) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah\sin(abh^2)}{h^3(a^2+b^2)} \qquad \textbf{2 puntos} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2b\sin(abh^2)}{h^2ab} \\ &= a^2b \qquad \textbf{5 puntos} \end{aligned}$$

c) **[8 ptos.]** Existencia de las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2$.

Solución: $\forall (x,y) \neq (0,0)$ se tiene que:

$$f_x(x,y) = \frac{(\sin(xy) + xy\cos(xy))(x^2+y^2) - (2x^2\sin(xy))}{(x^2+y^2)^2}$$

2 puntos

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2\cos(xy))(x^2+y^2) - (2yx\sin(xy))}{(x^2+y^2)^2}$$

2 puntos

Para $(x,y) = (0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(0)}{h^3} = 0$$

2 puntos

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\sin(0)}{h^3} = 0$$

2 puntos

d) **[8 ptos.]** Diferenciabilidad de f en $(0,0)$

Solución: Debemos demostrar que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sin(hk)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$ **2 puntos**

Tomando el camino $h = mk$

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sin(hk)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{mk\sin(mk^2)}{(m^2k^2+k^2)\sqrt{m^2k^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{mk\sin(mk^2)}{k^2(m^2+1)k\sqrt{m^2+1}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{m^2}{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}
\end{aligned}$$

Por lo que para distintos valores de m se tienen distintos resultados de éste límite por lo que no existe el límite y por lo tanto f no es diferenciable en (0,0)(el límite buscado no es 0)

6 puntos

2. a) **[10 ptos.]** Sea $z = 4 - x^2 - y^2$ la ecuación de una superficie S.

i) Encontrar una ecuación del plano tangente a S en el punto (1,1,2).

Solución: Sea $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 4$

- $F_x(1,1,2) = 2$
- $F_y(1,1,2) = 2$
- $F_z(1,1,2) = 1$

Luego la ecuación del plano buscado es : $2(x-1) + 2(y-1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 6 = 0$

5 puntos

ii) Encontrar la ecuación de la recta normal a la superficie en el punto $(1,1,2)$

Solución: Las euaciones paramétricas de la recta son:
$x = 1 + 2t$
$y = 1 + 2t$
$z = 2 + t$

5 puntos

b) **[10 ptos.]** Sea $z = f(x,y) = g\left(\frac{x}{y^2}\right)$ con f y g diferenciables, demuestre que la función f satisface la ecuación

$$2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Solución:
Sea $u = \dfrac{x}{y^2}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{1}{y^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{-2x}{y^3}$

5 puntos

$$\Rightarrow 2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x\frac{df}{du} \cdot \frac{1}{y^2} + y\frac{df}{du} \cdot \frac{-2x}{y^3} = 0$$

5 puntos

3. **[10 ptos.]** Determine los extremos de la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Solución: Debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{lclcl} f_x &=& 4x^3 - 4(x-y) &=& 0 \\ f_y &=& 4y^3 + 4(x-y) &=& 0 \end{array}\right|$$ Por lo que $4x^3 = -4y^3 \Rightarrow x^3 = -y^3 \Longleftrightarrow x = -y$

Luego reemplazando en la primera ecuación tenemos que :
$-4y^3 - 4(-y-y) = 0 \Longleftrightarrow -4y^3 + 8y = 0 \Longleftrightarrow -4y(y^2-2) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \vee \quad y = \pm\sqrt{2}$. Por lo que los puntos críticos son:
$(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ Ahora bien:

- $f_{xx} = 12x^2 - 4$
- $f_{yy} = 12y^2 - 4$
- $f_{xy} = 4$
- $H(x,y) = (12x^2-4)(12y^2-4) - 16$

5 puntos

-Para $(0,0) \Rightarrow H(0,0) = 0$ Por lo que para este punto no hay información
-Para $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \Rightarrow H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ y $f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ Por lo tanto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ es un mínimo
-Para $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ y $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ Por lo tanto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es un mínimo

5 puntos